개념 01

# 두 점 사이의 거리

좌표를 이용하면 평면 위의 점의 위치와 점들 사이의 관계를 정확하고 객관적으로 나타낼 수 있다.

## 1) 수직선 위의 두 점 사이의 거리

수직선 위의 두 점 사이의 거리는 각 점에 대응하는 두 실수의 큰 값에서 작은 값을 빼서 구한다. 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 $x_1 \le x_2$이면 $AB = x_2 - x_1$이고, $x_1 > x_2$이면 $AB = x_1 - x_2$이다.

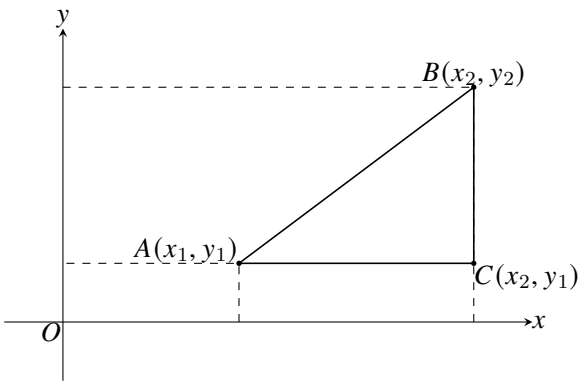
절댓값을 이용하면 $AB = |x_2 - x_1|$이다. 특히 원점 $O(0)$과 점 $A(x_1)$ 사이의 거리는 $OA = |x_1|$이다.

[참고] 기호 $AB$는 선분 $AB$ 또는 선분 $AB$의 길이를 나타낸다. $|x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$이므로 $AB = |x_1 - x_2|$로 나타내어도 된다.

[예 1] 두 점 $A(2)$, $B(-3)$ 사이의 거리는 $AB = |(-3) - 2| = |2 - (-3)| = 5$이다.

## 2) 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리

좌표평면 위의 두 점 사이의 거리는 피타고라스 정리를 이용하여 구할 수 있다. 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에서 각각 $x$축, $y$축에 평행하게 그은 두 직선의 교점을 $C$라 하면 $C(x_2, y_1)$이다.




$$AC = |x_2 - x_1|, \quad BC = |y_2 - y_1|$$

직각삼각형 $ABC$에서 $AB^2 = AC^2 + BC^2$이므로

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

이다. 이 관계는 선분 $AB$가 $x$축 또는 $y$축에 평행할 때에도 성립한다.

개념 01

# 거리 공식과 예제

| 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

특히 원점 $O(0, 0)$과 점 $A(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$이다.

[예 2] 두 점 $A(1, -3)$, $B(7, 5)$ 사이의 거리는 $AB = \sqrt{(7-1)^2 + \{5-(-3)\}^2} = 10$이다. 원점 $O(0, 0)$과 점 $P(-3, 4)$ 사이의 거리는 $OP = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$이다.

## 01

예제

두 점 $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 $y$축 위의 점 $Q$의 좌표를 구하시오.

## 02

예제

두 점 $A(2, -3)$, $B(4, 1)$과 직선 $y = x + 2$ 위의 점 $P(a, b)$에 대하여 $AP = BP$일 때, 두 상수 $a, b$의 곱 $ab$의 값을 구하시오.

## 03

예제

세 점 $A(2, -2)$, $B(7, -3)$, $C(4, -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$는 어떤 삼각형인가?

개념 02

# 외심의 좌표와 좌표의 활용

Advice

### 외심의 좌표

삼각형의 외심은 삼각형에 외접하는 원의 중심이다. 좌표평면 위의 두 점 사이의 거리 공식을 이용하여 외심의 좌표를 구할 수 있다.

세 점 $A(1,6)$, $B(-2,-3)$, $C(5,4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$의 외심을 $P(a,b)$라 하면 $PA=PB=PC$이다.

$PA^2=PB^2$에서 $(a-1)^2+(b-6)^2=(a+2)^2+(b+3)^2$이므로 $a+3b=4$이다. 또 $PB^2=PC^2$에서 $(a+2)^2+(b+3)^2=(a-5)^2+(b-4)^2$이므로 $a+b=2$이다.

두 식을 연립하면 $a=1$, $b=1$이다. 따라서 외심은 $P(1,1)$이다.

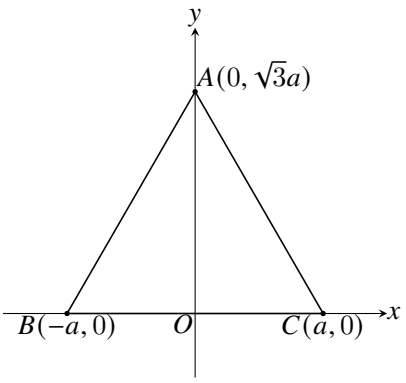
### 좌표의 활용

좌표를 이용하면 도형에 관한 문제를 쉽게 해결할 수 있는 경우가 많다. 이때 점의 좌표가 간단해지도록 좌표축과 원점을 정하면 편리하다.

정삼각형은 $B(-a,0)$, $C(a,0)$, $A(0,\sqrt{3}a)$로, 이등변삼각형은 $B(-a,0)$, $C(a,0)$, $A(0,b)$로 놓을 수 있다. 직각삼각형은 직각의 꼭짓점을 원점으로 잡아 $B(0,0)$, $A(0,b)$, $C(a,0)$로 놓는다.

직사각형은 $B(0,0)$, $C(a,0)$, $A(0,b)$, $D(a,b)$로, 평행사변형은 $B(0,0)$, $C(c,0)$, $A(a,b)$, $D(a+c,b)$로 놓을 수 있다. 등변사다리꼴은 $B(-c,0)$, $C(c,0)$, $A(-a,b)$, $D(a,b)$로 놓으면 편리하다.

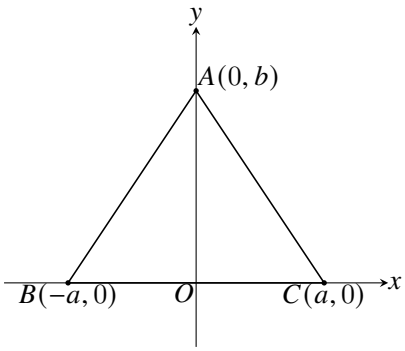
① 정삼각형



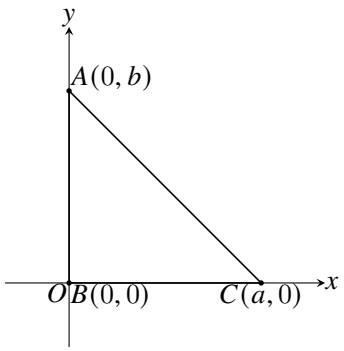
개념 02

# 외심의 좌표와 좌표의 활용

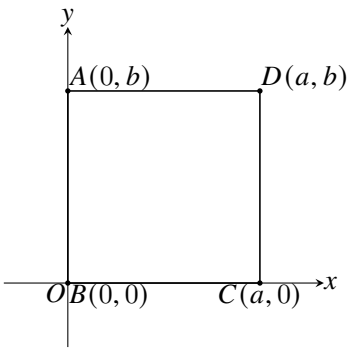
② 이등변삼각형




③ 직각삼각형



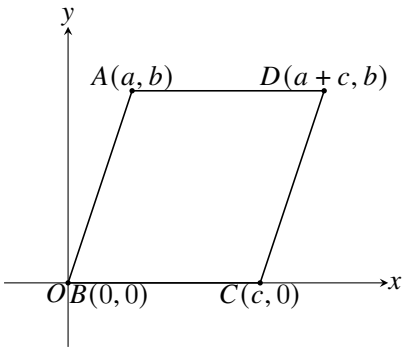

④ 직사각형



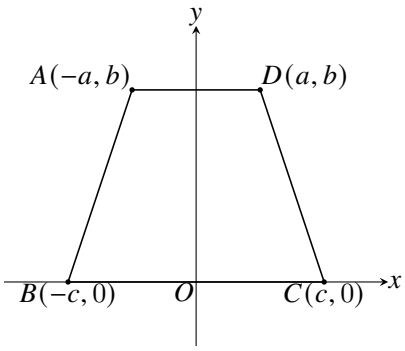
개념 02

# 외심의 좌표와 좌표의 활용

⑤ 평행사변형




6. 등변사다리꼴



개념 02

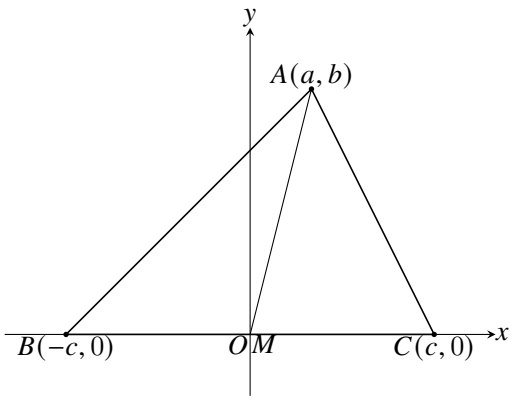
# 중선정리와 좌표의 활용

### 중선정리의 증명

삼각형 $ABC$에서 변 $BC$의 중점을 $M$이라 할 때, 다음이 성립한다.

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

직선 $BC$를 $x$축으로, 점 $M$을 지나고 $BC$에 수직인 직선을 $y$축으로 잡으면 $M$은 원점이 된다. 세 점을 $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$으로 놓는다.




$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \{(a+c)^2 + b^2\} + \{(a-c)^2 + b^2\} \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

한편 $2(AM^2 + BM^2) = 2(a^2 + b^2 + c^2)$이므로 중선정리가 성립한다.

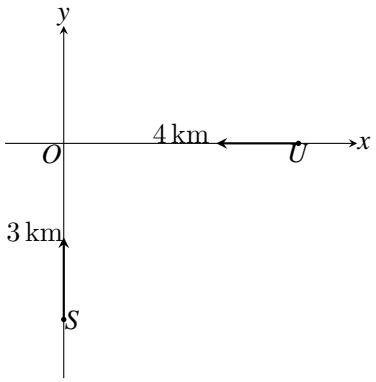
개념 02

# 중선정리와 좌표의 활용

## 04

예제

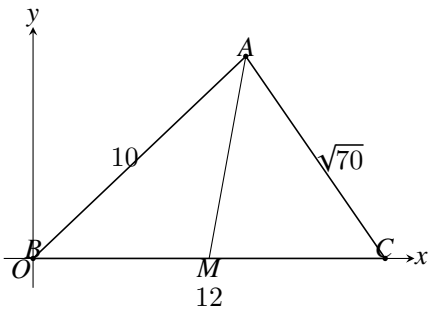
그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차로 $O$에서 유찬이는 동쪽으로 4 km, 서진이는 남쪽으로 3 km 떨어진 지점에 있다. 유찬이는 시속 2 km로 서쪽을 향해, 서진이는 시속 4 km로 북쪽을 향해 동시에 출발하였을 때, 두 사람의 거리가 가장 가까워지는 순간은 출발한 지 몇 시간 후인지 구하시오.




## 05

예제

그림과 같이 삼각형 $ABC$의 변 $BC$의 중점이 $M$이고 $AB = 10$, $AC = \sqrt{70}$, $BC = 12$일 때, 선분 $AM$의 길이를 구하시오.



# 유형연습

1–3

## 1.

거리 조건과 이차방정식

두 점 $A(3,3)$, $B(a,-2)$ 사이의 거리가 $5\sqrt{2}$일 때, 이를 만족하는 모든 실수 $a$의 값의 합을 구하시오.

## 2.

거리 부등식과 정수의 개수

두 점 $A(2,a)$, $B(a,6)$ 사이의 거리가 $4$ 이하가 되도록 하는 정수 $a$의 개수는?

① $1$ ② $2$

③ $3$ ④ $4$

⑤ $5$

## 3.

두 거리의 비

세 점 $A(-5,a)$, $B(1,2)$, $C(3,6)$에 대하여 $\overline{AC}=2\overline{BC}$일 때, 모든 실수 $a$의 값의 합은?

① $10$ ② $12$

③ $14$ ④ $16$

⑤ $18$

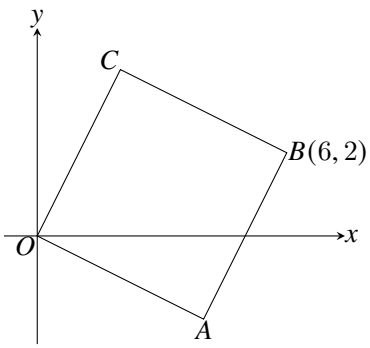
# 유형연습

4-5

## 4.

정사각형의 대각선과 넓이

그림과 같은 정사각형 $OABC$에서 점 $B$의 좌표가 $(6, 2)$일 때, 정사각형 $OABC$의 넓이는?




① $2\sqrt{5}$ ② $4\sqrt{5}$

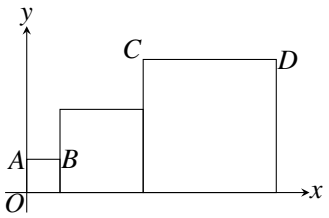
③ 10 ④ 20

⑤ 40

## 5.

맞닿은 정사각형과 좌표

그림과 같이 좌표평면 위에 세 개의 정사각형이 있다. $A(0, 2)$, $D(15, 8)$일 때, 두 점 $B, C$ 사이의 거리는? (단, 세 정사각형의 한 변은 모두 $x$축 위에 있다.)




① $3\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{14}$

③ $\sqrt{58}$ ④ $2\sqrt{15}$

⑤ $\sqrt{61}$

# 유형연습

6-9

## 6.

거리와 양수 조건

좌표평면 위의 두 점 $A(1,3)$, $B(2,a)$ 사이의 거리가 $\sqrt{17}$일 때, 양수 $a$의 값은?

① 5 ② 6

③ 7 ④ 8

⑤ 9

## 7.

매개변수 거리의 제곱의 최솟값

좌표평면 위에 두 점 $A(2t,-3)$, $B(-1,2t)$가 있다. 선분 $AB$의 길이를 $l$이라 할 때, 실수 $t$에 대하여 $l^2$의 최솟값을 구하시오.

## 8.

x축 위의 등거리점

두 점 $A(-1,2)$, $B(0,1)$에서 같은 거리에 있는 $x$축 위의 점 $P$에 대하여 $\overline{OP}$의 값을 구하시오. (단, $O$는 원점이다.)

## 9.

두 좌표축 위의 등거리점

두 점 $A(3,4)$, $B(5,2)$에서 같은 거리에 있는 $x$축 위의 점을 $P$, $y$축 위의 점을 $Q$라 할 때, 선분 $PQ$의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$

⑤ $2\sqrt{5}$

# 유형연습

10–11

## 10.

등거리 조건과 원점 거리

두 점 $A(0,1)$, $B(0,5)$에서 같은 거리에 있는 점 $P(a,b)$에 대하여 $\overline{OP}=7$일 때, $a^2-b^2$의 값은? (단, $O$는 원점이다.)

① 25 ② 31

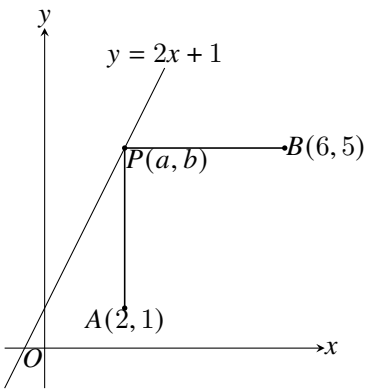
③ 37 ④ 43

⑤ 49

## 11.

직선 위의 등거리점

직선 $y=2x+1$ 위의 점 $P(a,b)$에서 두 점 $A(2,1)$, $B(6,5)$에 이르는 거리가 같을 때, $a+b$의 값은?




① 7 ② 8

③ 10 ④ 12

⑤ 14

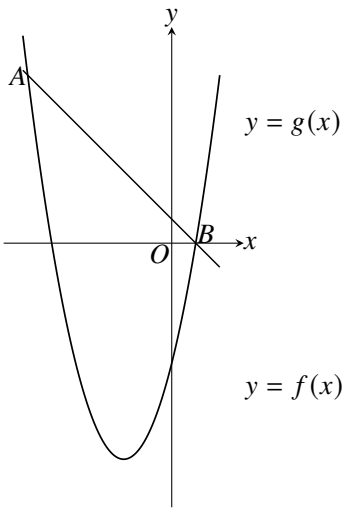
# 유형연습

12-13

## 12.

포물선 위의 등거리점

함수 $f(x)=x^2+4x-5$와 $g(x)=-x+1$의 그래프가 만나는 점을 각각 $A, B$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $P$에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$일 때, 점 $P$의 $x$좌표는? (단, 점 $P$의 $x$좌표는 음수이다.)




① $\frac{-3-\sqrt{51}}{2}$ ② $\frac{-3-2\sqrt{13}}{2}$

③ $\frac{-3-\sqrt{53}}{2}$ ④ $\frac{-3-\sqrt{6}}{2}$

⑤ $\frac{-3-\sqrt{55}}{2}$

## 13.

원점에서 같은 거리

좌표평면 위의 원점 $O$와 두 점 $A(5,-5)$, $B(1,a)$에 대하여 $\overline{OA}=\overline{OB}$를 만족시킬 때, 양수 $a$의 값은?

① 6 ② 7

③ 8 ④ 9

⑤ 10

# 유형연습

14–17

## 14.

직선 y=-x 위의 등거리점

좌표평면 위에 두 점 $A(2,4)$, $B(5,1)$이 있다. 직선 $y=-x$ 위의 점 $P$에 대하여 $\overline{AP}=\overline{BP}$일 때, 선분 $OP$의 길이는? (단, $O$는 원점이다.)

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$

③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$

⑤ $4\sqrt{2}$

## 15.

직각삼각형의 세 변

세 점 $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(a,5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형일 때, 실수 $a$의 값은?

① $-3$ ② $-2$

③ $-1$ ④ $1$

⑤ $2$

## 16.

좌표로 삼각형의 모양 판단

세 점 $A(0,0)$, $B(1,4)$, $C(5,3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $\overline{AB}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

② $\overline{BC}=\overline{CA}$인 이등변삼각형

③ 정삼각형

④ $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형

⑤ $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형

## 17.

이등변삼각형의 세 가지 경우

좌표평면 위에 세 점 $A(0,1)$, $B(1,4)$, $C(a,2)$가 있을 때, 삼각형 $ABC$가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 실수 $a$의 값의 곱은?

① 90 ② 85

③ 80 ④ 75

⑤ 70

# 유형연습



## 18.

정삼각형의 꼭짓점 좌표

두 점 $A(2,1)$, $B(-2,-1)$을 꼭짓점으로 하는 정삼각형 $ABC$의 꼭짓점 $C$의 좌표를 $(a,b)$라 할 때, 상수 $a,b$에 대하여 $ab$의 값은? (단, 점 $C$는 제2사분면의 점이다.)

① $-2$ ② $-4$

③ $-6$ ④ $-8$

⑤ $-10$

## 19.

직각 판정과 삼각형의 넓이

세 점 $A(-1,1)$, $B(1,3)$, $C(5,-1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$의 넓이는?

① 6 ② 8

③ 10 ④ 12

⑤ 14

## 20.

직각이등변삼각형의 조건

세 점 $A(0,2a)$, $B(-a,3)$, $C(3,-3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$가 $\angle B=90^\circ$인 직각이등변삼각형일 때, $a$의 값을 구하시오.

## 21.

세 점에서 같은 거리인 외심

세 점 $A(-1,0)$, $B(2,6)$, $C(5,-3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$의 외심의 좌표를 $P(x,y)$라고 할 때, $x+y$의 값을 구하시오.

# 유형연습



## 22.

변 위에 놓인 외심

$x$축 위의 점 $A$와 $y$축 위의 점 $B$에 대하여 삼각형 $PAB$의 외심은 변 $AB$ 위에 있고 외심의 좌표는 $(8,6)$이다. 삼각형 $PAB$의 외심과 점 $P$ 사이의 거리는?

① 5 ② 6

③ 8 ④ 9

⑤ 10

## 23.

외심이 변 위에 있는 삼각형

좌표평면 위의 한 점 $A(2,1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 $ABC$의 외심 $P(-1,-1)$이 변 $BC$ 위에 있을 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$의 값을 구하시오.

## 24.

거리의 합 최솟값의 해석

다음은 실수 $x, y$에 대하여 $\sqrt{x^2+16}+\sqrt{(x-3)^2+2^2}$의 최솟값을 구하는 과정이다. (단, $a>0$, $b>0$, $c<0$) 빈칸의 $a, b, c$ 및 $d$에 대하여 $a+b+c+d$의 값은?

> 좌표평면 위에서 $\sqrt{x^2+16}$은 두 점 $(x,0)$, $(0,a)$ 사이의 거리이고, $\sqrt{(x-3)^2+2^2}$은 두 점 $(x,0)$, $(b,c)$ 사이의 거리이다. 세 점 $(x,0)$, $(0,a)$, $(b,c)$를 각각 $A, B, C$라고 하면 $\overline{AB}+\overline{AC} \geq \overline{BC}$이고 $\overline{BC}=d$이므로 구하는 최솟값은 $d$이다.

① $5+2\sqrt{2}$ ② $5+3\sqrt{2}$

③ $5+3\sqrt{5}$ ④ $7+2\sqrt{2}$

⑤ $10+3\sqrt{2}$

# 유형연습

25–28

## 25.

선분 위의 점과 거리의 합

두 점 $A(-1,5)$, $B(5,-3)$과 임의의 점 $P$에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PB}$의 최솟값은?

① 9 ② 10

③ 11 ④ 12

⑤ 13

## 26.

두 근호를 거리의 합으로 보기

좌표평면 위의 세 점 $O(0,0)$, $A(a,b)$, $B(2,-1)$에 대하여 $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-2)^2+(b+1)^2}$의 최솟값은?

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$

⑤ $2\sqrt{5}$

## 27.

네 거리의 합과 두 대각선

네 점 $O(0,0)$, $A(3,4)$, $B(6,-2)$, $C(1,-2)$와 한 점 $P$가 있을 때, $\overline{PO}+\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$의 최솟값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$

③ $2\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{5}$

⑤ $4\sqrt{10}$

## 28.

거리의 차의 최댓값

좌표평면에 두 점 $A(3,6)$과 $B(5,10)$이 있다. $x$축 위에 있는 점 $P$에 대하여 $|\overline{PB}-\overline{PA}|^2$의 최댓값은?

① 15 ② 16

③ 18 ④ 20

⑤ 25

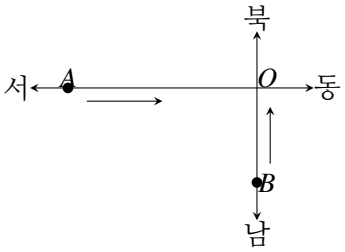
# 유형연습



## 29.

이동하는 두 점 사이의 최소거리

그림과 같이 지점 $O$에서 수직으로 만나는 직선 모양의 두 도로가 있다. A학생은 지점 O로부터 서쪽 방향으로 $10\,\mathrm{km}$만큼 떨어진 지점에서 출발하여 동쪽 방향으로 시속 $3\,\mathrm{km}$의 속력으로 걸어가고, B학생은 지점 O로부터 남쪽 방향으로 $5\,\mathrm{km}$만큼 떨어진 지점에서 출발하여 북쪽 방향으로 시속 $4\,\mathrm{km}$의 속력으로 걸어가려고 한다. 두 학생 A, B가 동시에 출발할 때, 두 학생 사이의 거리가 최소가 되는 시간을 $a$, 그때의 거리를 $b\,\mathrm{km}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, 도로의 폭과 학생의 크기는 무시한다.)




## 30.

x축 위에서 두 거리의 제곱의 합

두 점 $A(0,1)$, $B(4,3)$과 $x$축 위의 점 $P$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값을 $a$, 그때의 점 $P$의 좌표를 $(b,0)$이라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

# 유형연습

31–32

## 31.

두 거리 제곱의 합이 최소인 점

두 점 $A(3,1)$, $B(-1,5)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값이 최소일 때의 점 $P$와 원점 사이의 거리는?

① $\sqrt{5}$ ② $\sqrt{6}$

③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$

⑤ $2\sqrt{3}$

## 32.

직선 위에서 거리 제곱의 합 최소

두 점 $A(4,-2)$, $B(1,-5)$와 직선 $y=x+3$ 위의 점 $P(a,b)$에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$이 최솟값을 가질 때, $a^2+b^2$의 값은?

① 5 ② 13

③ 17 ④ 25

⑤ 30

# 유형연습

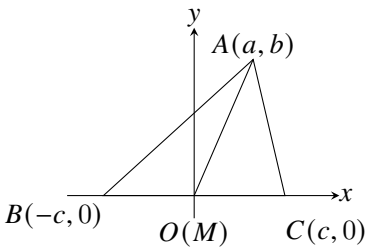


## 33.

중선정리의 좌표 증명

삼각형 $ABC$의 변 $BC$의 중점을 $M$이라 할 때, $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이 성립함을 보이는 과정이다. 두 빈칸에 공통으로 알맞은 식은?

> 직선 $BC$를 $x$축으로 하고 점 $M$을 지나고 직선 $BC$에 수직인 직선을 $y$축으로 하는 좌표평면에서 $M$을 원점으로 정한다. $A(a,b)$, $B(-c,0)$이라 하면 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\square)$이고 $\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=\square$이다.




① $\sqrt{a^2+b^2}$ ② $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

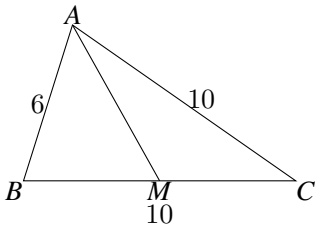
③ $2(a^2+b^2+c^2)$ ④ $a^2+b^2+c^2$

⑤ $-a^2+b^2-c^2$

## 34.

중선의 길이

삼각형 $ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=10$, $\overline{CA}=10$이고 변 $BC$의 중점이 $M$일 때, 중선 $AM$의 길이는?




① $\sqrt{21}$ ② $2\sqrt{6}$

③ $2\sqrt{7}$ ④ $\sqrt{43}$

⑤ $3\sqrt{5}$