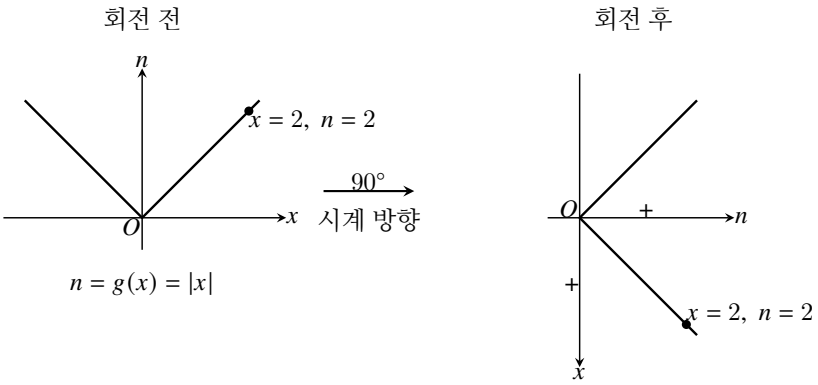
테마 04

n축의 시작: 속함수의 축을 90도 회전

$n = g(x)$라 놓고 $x \to n \to y = f(n)$의 순서로 읽는다.

속함수의 좌표축과 그래프를 함께 시계방향으로 $90°$ 회전한다.



회전한 속함수의 축 방향

x축의 양의 방향은 아래쪽, n축의 양의 방향은 오른쪽이다. 회전해도 원래의 대응은 바뀌지 않는다.

겉함수의 입력축에 연결

겉함수는 가로 n, 세로 y로 그린다. 두 n축의 0과 눈금 간격을 맞추어 같은 중간값을 위아래로 연결한다.

Advice

합성할 수 있는 값인지 확인

속함수의 치역이 겉함수의 정의역에 포함되어야 한다.

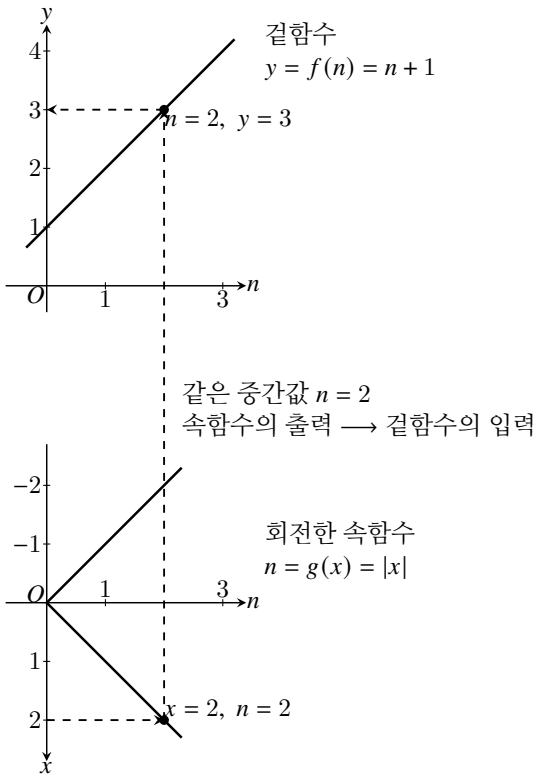
수학의 힘 Power of Mathematics 박승배T

테마 04

n축의 시범: 회전한 속함수에서 겉함수로

[시범] $g(x)=|x|$, $f(n)=n+1$을 n축으로 연결한다.

속함수의 치역에 있는 수를 겉함수에 넣는다



처음 입력 x는 아래쪽으로 커진다

아래 x축의 2에서 속함수를 만나면 $n=2$이다. 같은 $n=2$ 눈금을 따라 위로 연결하면 겉함수의 출력 $y=3$을 읽는다.

Advice

최종 좌표

회전한 그림의 위치가 아니라 처음 입력 x와 최종 출력 y로 점 (x, y)를 찍는다.

테마 04

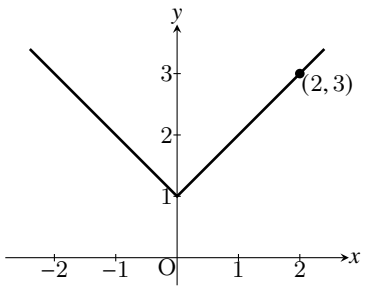
n축의 시범: 여러 점으로 그래프 완성

표의 각 열을 $x \to n \to y$로 읽고, 첫째 줄과 셋째 줄에서 최종 점 (x, y)를 얻는다.

x	-2	-1	0	1	2
$n = \lvert x \rvert$	2	1	0	1	2
$y = n + 1$	3	2	1	2	3

각 부분이 일차식이므로 꼭짓점 $(0, 1)$을 지나는 두 직선으로 그린다.

$$y = f(g(x)) = |x| + 1$$

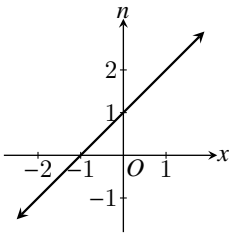


01

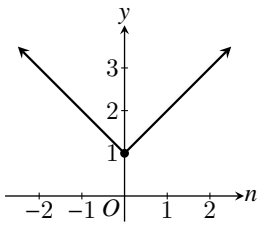
예제

아래는 두 함수 f, g의 그래프이다. 주어진 그래프를 이용하여 $y = f(g(x))$의 그래프를 n축으로 그리시오. 또 $f(g(-2))$의 값과 합성그래프 위에서 처음 입력이 -2인 점의 좌표를 구하시오.

속함수 g



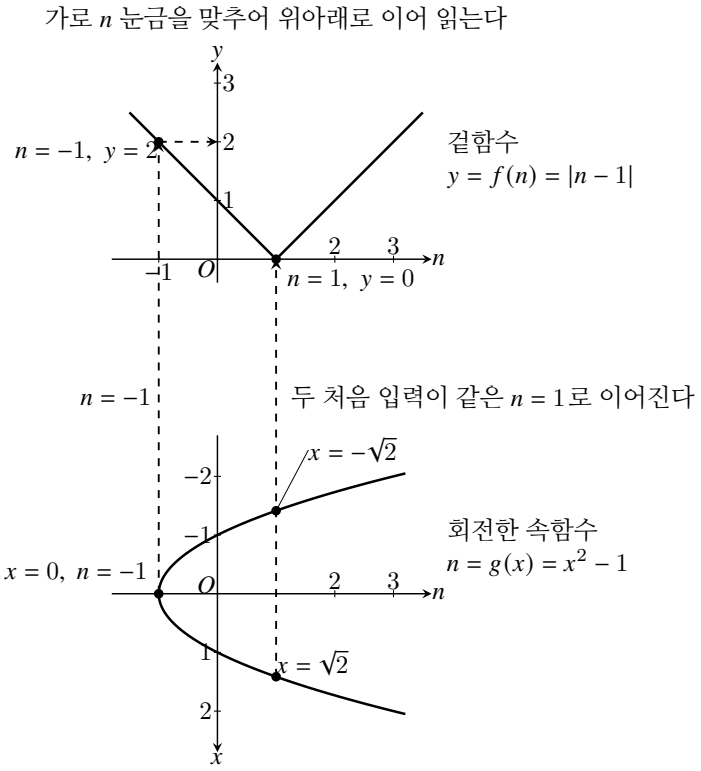
겉함수 f



테마 04

추가 시범: 포물선과 절댓값을 n축으로

[시범] $g(x)=x^2-1,\ f(n)=|n-1|$을 n축으로 연결한다.



속함수의 꼭짓점은 $x=0,\ n=-1$

$n=1$을 만드는 처음 입력은 $x=\pm\sqrt{2}$이다. 두 입력 모두 $\pm\sqrt{2}\to 1\to 0$으로 이어져 최종 점은 $(-\sqrt{2},0),\ (\sqrt{2},0)$이다.

속함수의 꼭짓점에서는 $0\to -1\to 2$이므로 최종 점 $(0,2)$를 얻는다.

Advice

같은 중간값, 서로 다른 점

서로 다른 처음 입력이 같은 중간값을 만들면 출력은 같아도 최종 점은 각각 표시한다.

테마 04

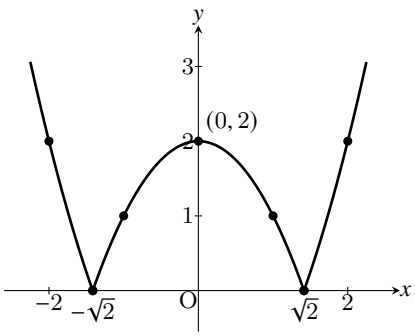
추가 시범: 세 부분의 곡선으로 완성

$n = x^2 - 1$을 겉함수에 넣으면 $y = |n - 1| = |x^2 - 2|$이다.

x	-2	-1	0	1	2
$n = x^2 - 1$	3	0	-1	0	3
$y = \|n - 1\|$	2	1	2	1	2

$x \le -\sqrt{2}$ 또는 $x \ge \sqrt{2}$에서는 $y = x^2 - 2$, $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$에서는 $y = 2 - x^2$이다. 경계 $x = \pm\sqrt{2}$에서는 $y = 0$이다.

$y = |x^2 - 2|$



Advice

점 사이의 모양

이차식인 부분은 포물선으로 그린다. 표의 점을 모두 직선으로 잇지 않는다.

테마 04

먼저 찾을 입력: 바깥 함수의 기준

겉함수의 꼭짓점이나 식이 바뀌는 중간값이 $n = a$이면, 대응하는 처음 입력은 $g(x) = a$에서 찾는다. 속함수 자체의 꼭짓점과 허용되는 처음 입력의 양끝도 함께 표시한다.

Advice

중간값과 처음 입력 구별

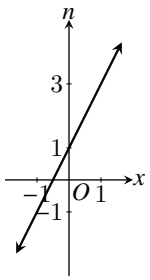
중간값의 기준 $n = a$를 그대로 최종 그래프의 $x = a$로 옮기지 않는다.

02

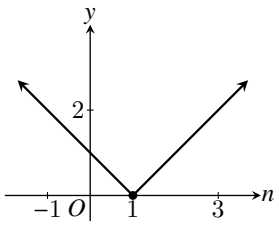
예제

아래는 두 함수 f, g의 그래프이다. 겉함수의 꼭짓점에 대응하는 처음 입력을 그래프에서 찾고, $y = f(g(x))$의 전체 그래프를 n축으로 그리시오.

속함수 g



겉함수 f



테마 04

절댓값 안쪽 함수: 같은 중간값 찾기

| $a \neq b$이고 $g(a) = g(b) = n_0$이면 최종 점은 $(a, f(n_0))$, $(b, f(n_0))$ 두 개이다.
두 점의 높이는 같지만 처음 입력이 다르므로 한 점으로 합치지 않는다.

Advice

겉함수에서 읽는 부분

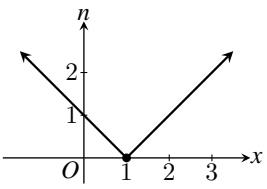
속함수의 치역에 해당하는 부분만 읽는다. 예를 들어 $g(x) \geq 0$이면 겉함수도 $n \geq 0$인 부분만 사용한다.

03

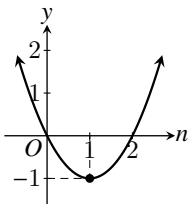
예제

아래 그래프에서 곡선은 포물선이다. 겉함수에서 실제로 사용하는 부분을 확인하고, $y = f(g(x))$의 전체 그래프를 n축으로 그리시오. 겉함수의 꼭짓점에 대응하는 최종 점과 속함수의 꼭짓점에서 얻는 최종 점을 모두 표시하시오.

속함수 g



겉함수 f



테마 04

이차함수 안쪽 함수: 포물선의 모양 유지

| 각 부분이 일차식이면 직선으로, 이차식이면 포물선의 부분으로 그린다.
$f(n)=|n|$이면 $g(x)<0$인 곳에서 $y=-g(x)$, $g(x)\geq 0$인 곳에서 $y=g(x)$이다.

Advice

경계와 꼭짓점

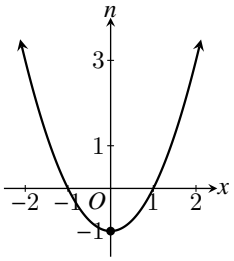
$g(x)=0$을 만족하는 처음 입력을 모두 찾고, 속함수 자체의 꼭짓점도 확인한다.

04

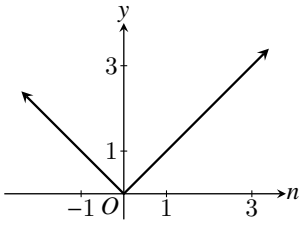
예제

아래 그래프에서 곡선은 포물선이다. 겉함수의 꺾이는 점에 대응하는 처음 입력을 모두 찾고, 속함수의 꼭짓점에서 얻는 최종 점도 표시하여 $y=f(g(x))$의 전체 그래프를 n축으로 그리시오.

속함수 g



겉함수 f



테마 04

조건에 따라 달라지는 식과 점의 표시

겉함수의 조건은 중간값 $n = g(x)$로 판단한다. 조건의 경계가 $n = a$이면 처음 입력의 경계는 $g(x) = a$에서 찾는다.

포함되는 점은 채운 점, 포함되지 않는 점은 빈 점으로 표시한다. 같은 입력에서 높이가 다르면 실제 함숫값은 채운 점의 높이이다.

Advice

경계에서 직접 확인

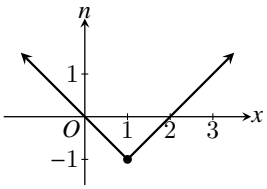
경계인 처음 입력에서는 $x \to g(x) \to f(g(x))$를 따라 실제 함숫값을 확인한다.

05

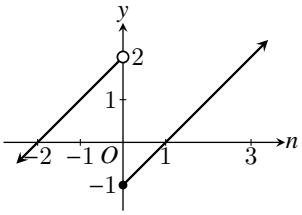
예제

아래는 두 함수 f, g의 그래프이다. 빈 점과 채운 점을 구별하여 $y = f(g(x))$의 전체 그래프를 n축으로 그리시오. 또 처음 입력이 0, 2일 때의 실제 함숫값을 각각 구하시오.

속함수 g



겉함수 f



테마 04

정의역 조건과 방정식에 적용

겉함수의 정의역 조건에 $n = g(x)$를 넣어 허용되는 처음 입력을 찾는다.
예를 들어 $a \le n \le b$라는 조건은 $a \le g(x) \le b$로 바꾸어 확인한다.
$f(g(x)) = c$는 먼저 $f(n) = c$를 만족하는 중간값을 찾고, 각 값에 대하여 $g(x) = n$을 푼다.

Advice

그래프의 처음과 끝

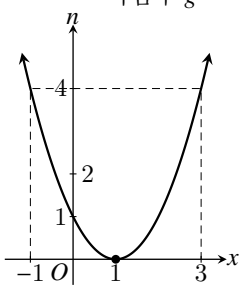
허용되는 범위에서만 그리고 양끝의 포함 여부를 확인한다. 방정식에서 얻은 입력도 이 범위에 속해야 한다.

06

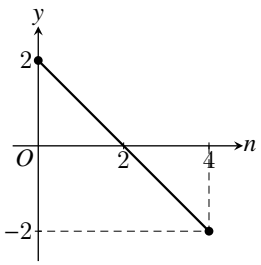
예제

아래 그래프의 곡선은 포물선이다. $y = f(g(x))$의 정의역과 그래프를 n축으로 구하고, 이 그래프와 x축의 교점 개수를 구하시오.

속함수 g



겉함수 f



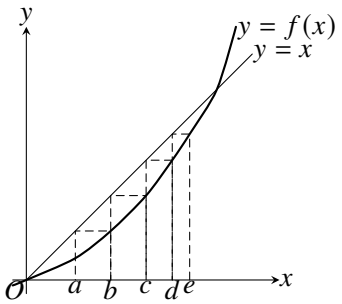
유형연습

1-2

1.

그래프에서 합성함숫값

그림은 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = x$를 나타낸 것이다.



$(f \circ f \circ f)(d)$의 값은?

(단, 모든 점선은 x축 또는 y축과 서로 평행하다.)

① a ② b

③ c ④ d

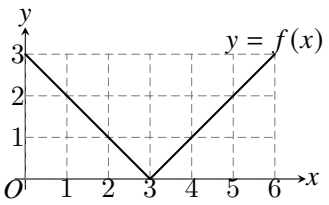
⑤ e

정답 ① a

2.

그래프에서 합성함숫값

그림은 함수 $y = f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다.



$0 \le x \le 6$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ f \circ f)(5) + (f \circ f)(4)$의 값은?

① 2 ② 3

③ 4 ④ 5

⑤ 6

정답 ③ 4

수학의 힘 Power of Mathematics 박승배T

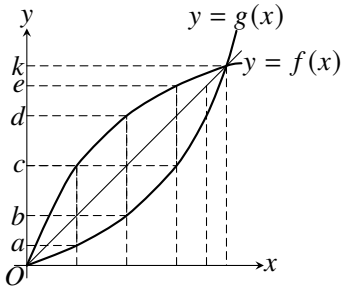
유형연습

3-4

3.

그래프에서 합성함숫값

그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다.



(가) $(g\circ f\circ g)(c)=x_1$

(나) $(f\circ g\circ f)(x_2)=c$

상수 x_1, x_2에 대하여 x_1+x_2의 값은? (단, 모든 점선은 x축 또는 y축과 서로 평행하다.)

① $b+e$ ② $c+e$

③ $2b$ ④ $2c$

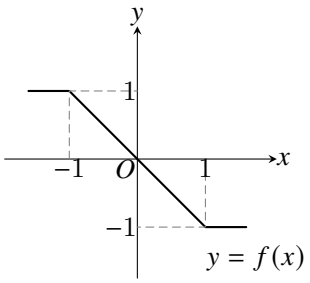
⑤ $c+d$

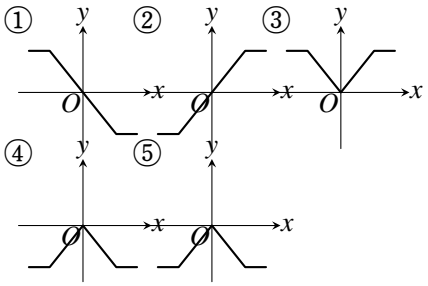
정답 ③ $2b$

4.

합성함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 함수 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프의 개형은?





정답 ②

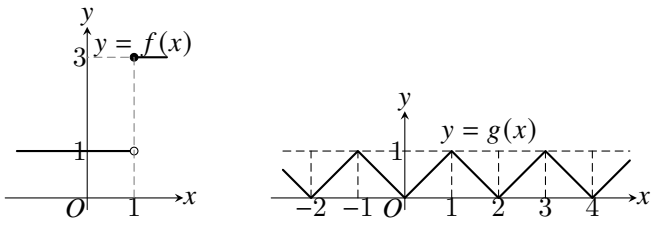
유형연습

5-6

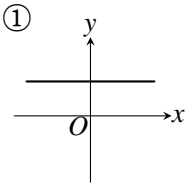
5.

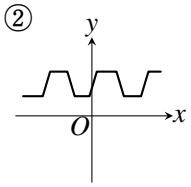
합성함수의 그래프

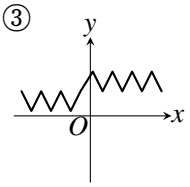
두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 각각 그림과 같다.

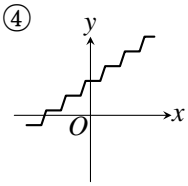


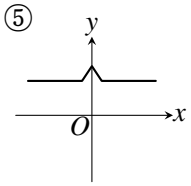
다음 중 $y=(g\circ f)(x)$ 의 그래프의 개형은?

① 

② 

③ 

④ 

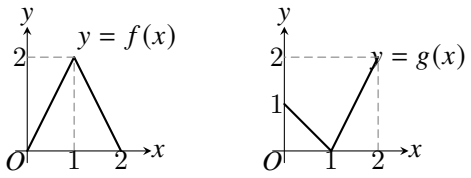
⑤ 

정답 ①

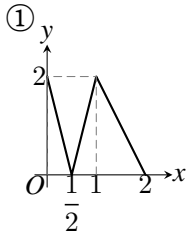
6.

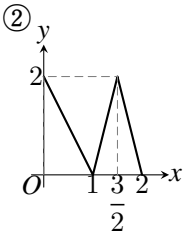
합성함수의 그래프

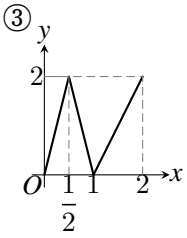
집합 $X=\{x\mid 0\le x\le 2\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.

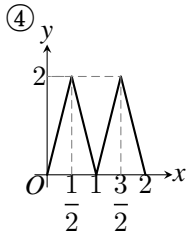


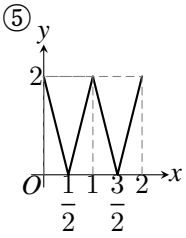
그림과 같을 때, 함수 $y=(f\circ g)(x)$ 의 그래프의 개형은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

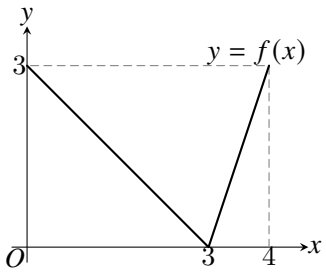
정답 ②

유형연습

7.

합성함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같이 $0 \le x \le 4$에서 정의될 때, 함수 $y=(f \circ f)(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① 4 ② 5

③ 6 ④ 7

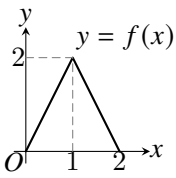
⑤ 8

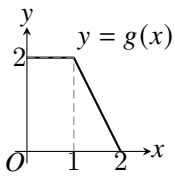
정답 ③ 6

8.

합성 그래프의 판단

$0 \le x \le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 그림과 같다.





함수 $y=(g \circ f)(x)$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> ㄱ. 함수 $y=(g \circ f)(x)$의 치역은 $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$이다.
>
> ㄴ. 함수 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프와 x축, y축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 3이다.
>
> ㄷ. 방정식 $(g \circ f)(x)=1$의 모든 실근의 합은 2이다.

① ㄱ ② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

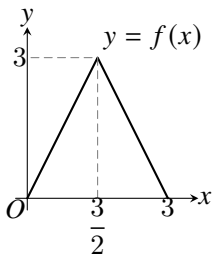
유형연습

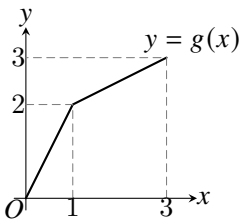
9-10

9.

합성 그래프의 판단

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 그림과 같다.





함수 $y=(g\circ f)(x)$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

> ㄱ. 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 최댓값은 3이다.
>
> ㄴ. 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 6이다.
>
> ㄷ. 방정식 $(g\circ f)(x)=1$의 모든 실근의 합은 3이다.

① ㄱ ② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ

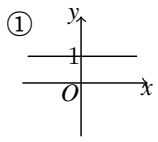
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

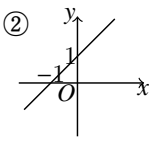
정답 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

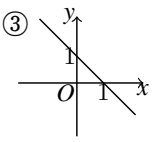
10.

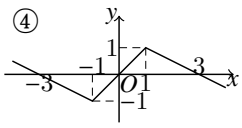
두 번 합성한 함수의 그래프

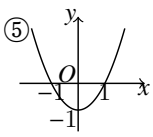
다음 함수의 그래프 중 정의역의 모든 원소 x에 대하여 $f(f(x))=x$를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

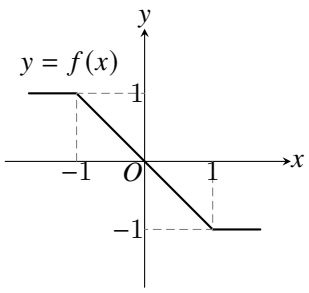
정답 ③

유형연습

11.

합성방정식의 실근

함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\le -1)\\ -x & (-1<x<1)\\ -1 & (x\ge 1)\end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같다.



방정식 $(f\circ f)(x)=\frac{1}{3}x$ 의 서로 다른 실근의 개수를 구하시오.

정답 3

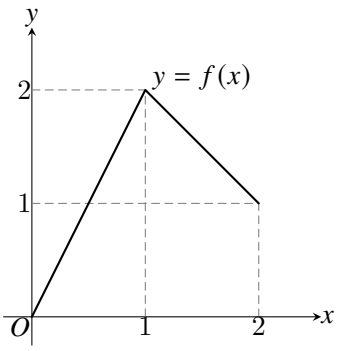
12.

합성 그래프와 직선

$0\le x\le 2$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}2x & (0\le x<1)\\ -x+3 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

에 대하여 합성함수 $y=(f\circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$ 의 교점의 개수는?



① 1 ② 2

③ 3 ④ 4

⑤ 5

정답 ③ 3

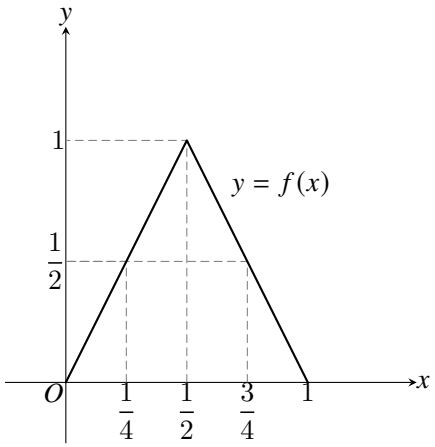
유형연습

13–14

13.

그래프와 합성의 주기

집합 $A=\{x \mid 0 \le x \le 1\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ $(n=1,2,3,\ldots)$이라 할 때,
$f\left(\frac{1}{4}\right)+f^2\left(\frac{1}{4}\right)+f^3\left(\frac{1}{4}\right)+\cdots+f^{10}\left(\frac{1}{4}\right)$의 값은?

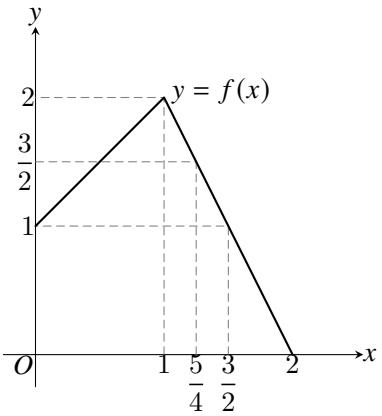
① 0 ② 1
③ $\frac{3}{2}$ ④ 2
⑤ $\frac{5}{2}$

정답 ③ $\frac{3}{2}$

14.

그래프와 합성의 주기

$0 \le x \le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n$ $(n=1,2,3,\ldots)$라고 할 때,
$f^{2026}\left(\frac{5}{4}\right)$의 값을 구하시오.

정답 0

유형연습

15-16

15.

경우를 나누어 정의된 함수의 합성 비교

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g가

$$f(x)=\begin{cases}2 & (x>2)\\ x & (|x|\le 2)\\ -2 & (x<-2)\end{cases},\qquad g(x)=x^2-2$$

일 때, 다음 [보기] 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $(f\circ g)(2)=2$

ㄴ. $(g\circ f)(x)=(g\circ f)(-x)$

ㄷ. $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$

① ㄱ ② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

정답 ⑤

16.

합성함수의 부호와 이차함수의 최솟값

두 함수 $f(x)=x^2-x-6$, $g(x)=x^2-ax+4$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)\ge 0$을 만족하는 정수 a의 개수를 구하시오.

정답 5

유형연습

17.

경우를 나누어 정의된 함수의 부호

두 함수 f, g가

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & (x<0)\\ 3x-2 & (x\geq 0)\end{cases},\qquad g(x)=ax^2+ax-4$$

일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오.

정답 9

18.

합성함수의 치역과 최솟값

두 함수

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2ax+6 & (x<0)\\ x+6 & (x\geq 0)\end{cases},\qquad g(x)=x+10$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 치역이 $\{y\mid y\geq 0\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

정답 4